Control
and Cybernetics
VOL. 5 (1976) No. 1

Contrôlabilité et observabilité des systèmes en série *

par

SZYMON DOLECKI

Académie Polonaise des Sciences
Institut de Mathématique
Warszawa, Pologne

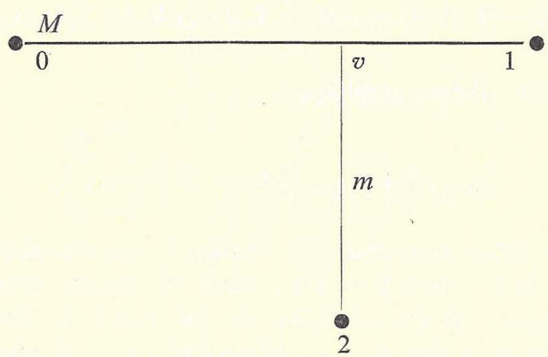
On considère le comportement d'un couplage en série de deux systèmes guidables en fonction des propriétés particulières de ces systèmes et de leur rapport mutual. Des systèmes deconsidérés ont une representation par des séries d'exponentielles. Donc une généralisation des résultats de l'approximation de Müntz–Szász est applicable.

1. Introduction

La plupart des systèmes guidables considérés dans la littérature sur le contrôle dans les espaces de dimension infinie est réalisée soit par les semigroupes abstraits soit par des équations aux dérivées partielles ou des équations avec retard, donc toujours dans un cadre plus ou moins explicite de semigroupes d'opérateurs.

Nous examinerons ici les propriétés des systèmes obtenus après couplage de deux systèmes traditionnels (notamment le couplage en série) (voir [9]). On peut s'imaginer facilement la situation suivante.

Exemple 1. Afin d'estimer la distribution de température d'une grosse barre de métal isolé M, on introduit un fil de fer isolé m, de manière à ce qu'un bout de fil soit attaché à la barre et qu'un autre serve aux observations extérieures:



(1)

* L'article écrit á l'Université de Bordeaux I, Talence.

La présence du petit fil m n'affecte pas le processus de la chaleur de M, on a donc les relations:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}, \qquad \frac{\delta u(0)}{\delta x}=\frac{\delta u(1)}{\delta x}=0, \\ &u(x, 0)=u_0(x), \qquad x \in M, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta w}{\delta t}=a^2 \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}, \qquad y \in m, \qquad w(v, t)=u(v, t), \\ &\frac{\delta w(2, t)}{\delta y}=0, \qquad z(t)=w(2, t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Notre tâche est de pouvoir estimer la répartition de la température sur M d'après la connaissance de $z(\cdot)$, de telle façon que l'application

$$z(\cdot) \to u(x, T) \tag{4}$$

soit continue.

Voilà la situation générale: un système observé, $\{H_2, S_2(t), t \geqslant 0\}$ composé d'un semigroupe d'opérateurs sur un espace de Hilbert X_2 et d'un observateur H_2 (dom $H_2 \to Y$) évolue, partant d'un état initial x_2.

(Dans l'exemple 1 la trejectoire observée du premier système est $u(v, t)$). La trajectoire observée $H_2 S_2(\cdot) x_2$ entre dans un autre système:

$$\{H_1, S_1(t), B_1, t \geqslant 0\} \tag{5}$$

par l'intermédiaire de l'opérateur B_1 ($Y \supset \text{dom } B_1 \xrightarrow{B_1} X_1$, où X_1 est l'espace de Hilbert, d'évolution du semigroupe $S_1(t)$).

(Dans notre exemple l'opérateur B_1, c'est un opérateur (non borné) des conditions aux limites).

La réponse du système (5) mélangé avec son évolution intérieure $S_1(\cdot) x_1$ est observée par un observateur H_1 ($X_2 \supset \text{dom } H_1 \to W$). Nous décrivons le comportement discernable du système couplé:

$$w(t)=H_1 S_1(t) x_1+H_1 \int_0^t S_1(t-\gamma) B_1 H_2 S_2(\gamma) x_2 \, d\gamma \tag{6}$$

et nous donnons un schéma graphique:

$$w(\cdot) \xleftarrow{H_1} \overset{x_1}{\boxed{S_1(\cdot)}} \xleftarrow{B_1} Y \xleftarrow{H_2} \overset{x_2}{\boxed{S_2(\cdot)}}. \tag{7}$$

La formule (6) définit l'*operatur d'observation* C, qui à chaque couple $(x_1, x_2) \in \in X_1 \times X_2$ associe une observation $w(\cdot)$ dans un certain espace d'observations $F(0, T)$. Nous voyons qu'on considère ici des solutions généralisées.

L'opérateur d'observabilité C_1 pour le système (5) est donnée usuellement par

$$C_1 x_1=H_1 S_1(\cdot) x_1 \tag{8}$$

pareil pour l'autre système et l'opérateur de contrôle de (5) est défini

$$D_1 f = \int_0^t S_1(t-\gamma) B_1 f(\gamma)\, d\gamma. \tag{9}$$

C'est un lieu convenable de rappeler des définitions diverses d'observabilité.

Définition 1 [3, 6, 13]. Soit C un operateur d'observation

$$C: Y \to Z$$

où Y et Z deux espaces de Hilbert.

a. Nous disons, que le processus décrit par C, est *démêlable*, si C est injectif

$$\operatorname{Ker} C = \{0\}. \tag{10}$$

b. Le processus est *observable* (*initialement*) si C possède l'inversion continue:

$$\|x\| \leqslant K \|Cx\|. \tag{11}$$

c. Le processus est *observable finalement*, si

$$\|x_T\| = \|S(T)\, x\| \leqslant K \|Cx\|. \tag{12}$$

Il faut faire ici plusieurs remarques.

D'abord les mots „démêlable" et „démêlabilité" sont choisis pour traduire „distinguishability" [3, 13].

Les propriétés a-c ont leurs analogues duals dans la contrôlabilité [4, 6, 18] qui seront présentés au fur et à mesure des besoins.

Enfin, le problème posé dans l'exemple 1 est de type c, observabilité finale (comparez [1, 2, 11]).

Une autre notion de la théorie du contrôle, qui apparaîtra ensuite, est la fonction transfer.

Ayant donné un système $\{H, S(t), B, t \geqslant 0\}$ on définit la fonction sur le plan complexe:

$$T(\lambda)\, x = H \mathscr{R}(\lambda, A)\, Bx. \tag{13}$$

On a

$$T(\lambda)\, x = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, HS(t)\, Bx\, dt. \tag{13'}$$

(Cette fonction est toujours bien définie quand H et B sont bornés [7''] et $\operatorname{Re} \lambda$ assez grand).

Définition 2. La fonction $T(\lambda)$ est une fonction transfer du système

$$\{H, S(t), B, t \geqslant 0\}.$$

La théorie de dualité [6, 18] nous permettra d'aborder simultanément les problèms de contrôlabilité d'un système dual à (6), (7). Calculons l'operateur dual C^* à (6) (avec le remplacement de t par $T-t$). Comme C agit sur $X_1 \times X_2$ et admet les valeurs dans $F(0, T)$ (lequel pour des raisons de simplicité nous spécifions d'être: $L^2(0, T; W)$, alors $C^*: L^2(0, T, W^*) \to X_1^* \times X_2^*$.

On a

$$\int_0^T w(t) f(T-t)\, dt = \int_0^T f(T-t)\, H_1\, S_1(t)\, x_1\, dt +$$

$$+ \int_0^T f(T-t)\, H_1 \left(\int_0^t S_1(t-\gamma)\, B_1\, H_2\, S_2(\gamma)\, x_2\, d\gamma \right) dt. \tag{14}$$

(Nous rappellons que $w(t) f(T-t)$ représente la forme bilinéaire canonique sur $W \times W^*$; la même convention dans la suite).

Le premier terme de la droite est égal à

$$\left(\int_0^T S_1^*(T-t)\, H_1^* f(t)\, dt \right) x_1 \tag{15}$$

et le second (au moins formellement)

$$\int_0^T d\gamma \int_\gamma^T S_2^*(\gamma)\, H_2^* B_1^*\, S_1^*(t-\gamma)\, H_1^* f(T-t)\, dt\, (x_2) =$$

$$= \int_0^T S_2^*(\gamma)\, H_2^* B_1^* \int_\gamma^T S_1^*(t-\gamma)\, H_1^* f(T-t)\, dt\, (x_2). \tag{16}$$

En introduisant $z = T-t$ on transforme l'intégrale intérieure de (16)

$$\int_0^{T-\gamma} S_1^*(T-\gamma-z)\, H^* f(z)\, dz. \tag{17}$$

Alors le système dual admet une interprétation suivante:

Nous appliquons le contrôle f dans le système (dual à (6)):

$$dy_1/dt = A_1^* y_1 + H_1^* f, \qquad y_1(0) = 0. \tag{18}$$

La solution de (18) observée par B_1^* entre dans le système (dual à C):

$$dy_2/dt = A_2^* y_2 + H_2^* B_1^* y_1, \qquad y_2(0) = 0,$$

où y_1 est une solution de (18). L'espace d'états (y_1, y_2) est $X_1^* \times X_2^*$. Voilà le schéma du nouveau couplage:

$$f \xrightarrow{H_1^*} \boxed{S_1^*(\cdot)} \xrightarrow{B_1^*} \xrightarrow{H_2^*} \boxed{S_2^*(\cdot)}. \tag{19}$$

Dans les problèmes des équations aux derivées partielles on utilise le théorème de la divergence afin d'obtenir d'une manière classique [6, 13] l'opérateur dual à C. Les liaisons entre les systèmes (6) et (16) restent essentiellement les mêmes.

L'introduction d'espaces de Hilbert dans certaines définitions démasque notre intention de considérer ici des systèmes spéciaux. En effet, on considère le cas où des semigroupes involus ont une représentation spectrale atomique, plus précisément: les valeurs propres λ_n sont simples et les vecteurs propres φ_n orthogonaux (et forment système total). Ceci est le cas de l'équation de la diffusion et l'équation de l'onde de dimension un.

Un outil efficace sera celui de l'approximation d'exponentiels [8, 10, 16] à laquelle nous procédons ensuite.

2. Quelques lemmes sur l'approximation de Müntz–Szász

On considère une suite de nombres complexes (différents)

$$\{\lambda_n\}_n \tag{20}$$

et une suite de fonctions

$$\{\exp \lambda_n t,\ t \exp \lambda_n t\} \tag{21}$$

dans $F(\alpha, \beta), 0<\alpha<\beta$. $F(\alpha, \beta)$ dénote un des espaces $C[\alpha, \beta]$, $L^p(\alpha, \beta)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer l'indépendance forte de (21) et d'éstimer les distances entre les fonctions (21) sous des hypothèses convenables sur (20).

Nous disons que l'ensemble des vecteurs $\{\varphi_n\}$ dans l'espace de Banach X est *fortement indépendant* si la condition $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = 0$ entraîne $c_n = 0$ pour tout n.

Fixons un élément φ_k et considérons S_k, l'enveloppe linéaire fermée de $\{\varphi_n\}_{n \neq k}$.

Si aucun φ_k n'appartient à S_k, $\{\varphi_n\}$ forme un ensemble fortement indépendant, ce qu'on déduit du théorème de Hahn–Banach.

Nous dénotons la distance dist (φ_k, S_k) par δ_k. Afin de montrer que $\varphi_k \notin S_k$ il faut et il suffit de trouver une forme linéaire continue h_k avec la propriété:

$$h_k(\varphi_k) \neq 0 \quad \text{et} \quad h_k(\varphi_n) = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq k. \tag{22}$$

Lemme 1. Aucune fonction de (21) n'appartient à l'enveloppe linéaire fermée des autres si

$$\sum \frac{1}{|\lambda_n|} < \infty. \tag{c}$$

Lemme 2. Si $\sum \frac{1}{|\lambda_n|}$ diverge, les ensembles $\{\exp \lambda_n t\}$ et $\{t \exp \lambda_n t\}$ engendrent tout l'espace (l'enveloppe linéaire fermée est égale à l'espace entier).

Le Lemme 2 vient directement du théorème 6.1 et de la remarque qui le suit [10] tandis que le Lemme 1 exige des modifications de raisonnement dans [10].

Avant de procéder à la démonstration directe du Lemme 1, construisons une classe de fonctions entières satisfaisantes de certaines hypothèses désirables (voir [10]):

$$G_{k0}(z) = z^2 A_k(z) \prod_n^{(k)} \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)^2 \exp(-i\sigma z) \prod_n \cos(\varepsilon_n z). \tag{23}$$

Le signe $\prod^{(k)}$ dénote une modification suivante de produit: le terme $\left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)^2$ est effacé et s'il y a p tels que $-\lambda_p$ est dans la sphère de rayon $\rho/2$ $(\rho > 0)$ autour

λ_k on remplace le terme $\left(1+\frac{z^2}{\lambda_{p^2}}\right)^2$ par $\left(1-\frac{z}{i\lambda_p}\right)^2$. (Le but de cette modification sera expliqué à l'occasion de la démonstration du Lemme 3, à venir).

Le terme $\prod_n \cos(\varepsilon_n z)$, avec $\varepsilon_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n<\infty$, rassure le type exponentiel γ arbitraire de la fonction (23) ainsi que sa sommabilité sur l'axe réel. Le terme $\exp -i\sigma z$ nous permettra d'appliquer le théorème de Paley–Wiener avec le support assymétrique ($\sigma-\gamma=\alpha$, $\sigma+\gamma=\beta$) de l'inverse de Fourier de (23). Enfin une fonction entière Λ_k ensemble avec $\prod_n^{(k)}$ servir à preétablir des zóeros de G_{k0} et de sa dérivée.

Nous observons d'abord que $G_{k0}(i\lambda_n)=0$ pour $n\neq k$. La construction de $\prod_n \cos(\varepsilon_n z)$ nous donne une certaine liberté pour éviter la situation où $\prod_n \cos\varepsilon_n(i\lambda_k)=$ $=0$ [10]. Nous choisirons Λ_k de façon que $\Lambda_k(i\lambda_k)\neq 0$. On aura donc

$$G_{k0}(i\lambda_n)=0 \quad \text{pour} \quad n\neq k \tag{24}$$

et

$$G_{k0}(i\lambda_k)\neq 0\,. \tag{25}$$

Il est aussi évident que la dérivée DG_{k0} s'annule pour tout $z=i\lambda_n$, $n\neq k$. Le définition de Λ_k ((29) et (31)) donnera

$$DG_{k0}(i\lambda_n)=0 \quad \text{pour tout } n. \tag{26}$$

Récrivons (23) $G_{k0}(z)=\Lambda_k(z)\cdot H_k(z)$; donc après une dérivation

$$DG_{k0}=D\Lambda_k\, H_k+\Lambda_k\, DH_k\,. \tag{27}$$

D'après (25) il faut que

$$\Lambda_k(i\lambda_k)\neq 0\,, \qquad H_k(i\lambda_k)\neq 0\,. \tag{28}$$

Si $DH_k(i\lambda_k)=0$ nous posons

$$\Lambda_k(z)=\left(1-\frac{z}{i\lambda_k}\right)^2+1 \tag{29}$$

et (24)—(26) sont vérifiés.

Si $DH_k(i\lambda_k)\neq 0$, la condition que (27) soit zéro donne

$$\Lambda_k(i\lambda_k)=-\frac{H_k(i\lambda_k)}{DH_k(i\lambda_k)}D\Lambda_k(i\lambda_k) \tag{30}$$

ou

$$\Lambda_k(i\lambda_k)=\xi D\Lambda_k(i\lambda_k)\,,$$

il suffit de poser

$$\Lambda_k(z)=\frac{z^2}{\lambda_k^2}+1+\frac{2\xi}{\lambda_k^2}\,. \tag{31}$$

Maintenant nous introduisons la seconde classe de fonctions

$$G_{k1}=z^2\left(1+\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)\prod_n^{(k)}\left(1+\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)^2 \exp(-i\sigma z)\prod_n \cos(\varepsilon_n z)\,. \tag{32}$$

On s'aperçoit immédiatement que

$$G_{k1}(i\lambda_n)=0 \qquad \text{pour tout } n, \tag{33}$$

$$DG_{k1}(i\lambda_n)=0, \qquad n\neq k, \tag{34}$$

$$DG_{k1}(i\lambda_k)\neq 0. \tag{35}$$

Démonstration du Lemme 1. D'après les résultats de [10] (Théorème 4.1 et paragraphe 7) nous somme autorisés à appliquer le théorème de Paley–Wiener [12]

$$G_{k0}(z)=\int_{\alpha}^{\beta} \exp(-izt)\, g_{k0}(t)\, dt \tag{36}$$

où $g_{k0}\in C^{\infty}[\alpha,\beta]$. La formule de dérivation de la transformée de Fourier [15] permet d'écrire

$$i\,(d/dz)\, G_{k0}(z)=iDG_{k0}(z)=\int_{\beta}^{\alpha} t\exp(-izt)\, g_{k0}(t)\, dt. \tag{37}$$

Les relations (24)—(26) se traduisent en

$$\int_{\alpha}^{\beta} \exp(\lambda_n t)\, g_{k0}(t)\, dt, \qquad n\neq k, \tag{24'}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \exp(\lambda_k t)\, g_{k0}(t)\, dt\neq 0, \tag{25'}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} t\exp(\lambda_n t)\, g_{k0}(t)\, dt=0 \qquad \text{pour tout } n \tag{26'}$$

et définissent une fonctionelle de type (22) pour chaque $\exp \lambda_k t$ et pour tous les espaces $F(\alpha,\beta)$.

Les considérations analogues sont valables pour G_{k1} et pour une fonction g_{k1} correspondante à $t\exp\lambda_k t$.

Lemme 3. Si la suite $\{\lambda_n\}$ vérifie les conditions:

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_n|\geqslant\delta\,|\lambda_n| \quad \text{pour grands } n, \tag{38}$$

$$|\lambda_n-\lambda_m|\geqslant\rho\,|n-m| \quad \text{quels que soient } n \text{ et } m, \tag{39}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}<\infty. \tag{40}$$

Alors les distances δ_{k0} et δ_{k1} correspondantes à $\exp(\lambda_k t)$ et $t\exp(\lambda_k t)$ diminuent moins vite que $\exp(-\varepsilon\,|\mathrm{Re}\,\lambda_k|)$.

Démonstration. La fonction g_{k0} satisfait à

$$|G_{k0}(i\lambda_k)|=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\exp(\lambda_k t)\, g_{k0}(t)\, dt\right|\leqslant\delta_{k0}\sup_t|g_{k0}(t)|. \tag{41}$$

Nous savons ([10], p. 32) que les fonctions d'une variable réelle u peuvent être estimées uniformément pour k assez grand:

$$|G_{k0}(u)| \leqslant H_0(u) \tag{42}$$

où $H(u)$ est intégrable sur $(-\infty, \infty)$.

On applique la transformée inverse de Fourier:

$$g_{k0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k0}(u) \exp(itu)\, dt \tag{43}$$

et on estime

$$\sup_t |g_{k0}(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(u)\, du = M_0 \text{ pour grands } k. \tag{44}$$

Alors

$$\delta_{k0} \geqslant \frac{1}{M_0} |G_k(i\lambda_k)| \tag{45}$$

et l'application directe des Lemmes 7.2 et 7.3 de [10] donne

$$\delta_{k0} \geqslant \exp(-\varepsilon |\mathrm{Re}\, \lambda_k|) \tag{46}$$

pour $k \to \infty$. (Dans le Lemme 7.2 on utilise la modification de $\prod^{(k)}$ que nous avions annoncée).

Pour g_{k1} on obtient

$$|DG_{k1}(i\lambda_k)| = \left| \int_\alpha^\beta t \exp(\lambda_k t)\, g_{k1}(t)\, dt \right| \leqslant \beta \delta_{k1} \sup_t |g_{k1}(t)| \tag{47}$$

et aussi

$$g_{k1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k1}(u) \exp(itu)\, dt, \tag{48}$$

$$\sup_t |g_{k1}(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\, dt = M_1 \text{ pour grands } k. \tag{49}$$

Finalement

$$\delta_{k1} \geqslant \exp(-\varepsilon |\mathrm{Re}\, \lambda_k|). \tag{46'}$$

3. Démêlabilité du couplage

Le processus $\{H_1, S_1(t), B_1\}$ admet les valeurs propres $\{\lambda_n\}$ et les vecteurs propres (orthogonaux) $\{\varphi_n\}$.

Etant donnée la valeur initiale

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n. \tag{50}$$

Le semigroupe opère de la façon suivante

$$x(t) = \sum c_n \exp(\lambda_n t)\, \varphi_n \tag{51}$$

les opérateurs H_1 et B_1 ne sont que les formes linéaires (pas nécessairement continues), nous donnons donc une représentation formelle par les séries (pas nécessairement convergentes).

$$H_1 = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(1)} \varphi_n, \qquad B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} \varphi_n. \tag{52}$$

Le processus $\{H_2, S_2(t)\}$ a des valeurs propres $\{\mu_m\}$, des vecteurs propres ψ_m et on a

$$x_2 = \sum_m d_m \psi_m, \qquad H_2 = \sum_m h_m^{(2)} \psi_m \tag{53}$$

la seconde série peut être formelle.

La trajectoire observée est de la forme

$$H_2 S_2(t)\, x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} h_m^{(2)} d_m \exp(\mu_m t). \tag{54}$$

La spécification admise, ensemble avec (6) donnent

$$w(T) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n^{(1)} \exp(\lambda_n(T)) + \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(1)} b_n^{(1)} \exp(\lambda_n(T-t))\right] \times \\ \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2)} d_m \exp(\mu_m t)\right) dt. \tag{55}$$

Il est raisonnable et souvent justifié de supposer que les deux séries dans (55) convergent dans $L^2(0, T)$. Alors l'intégrale réalise le produit scalaire dans cet espace et on obtient, grâce à la continuité de produit

$$w(T) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n^{(1)} \exp \lambda_n T + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_n^{(1)} b_n^{(1)} h_m^{(2)} d_m \int_0^T \exp(\lambda_n(T-t)) \exp(\mu_m t)\, dt. \tag{56}$$

De l'autre côté la convolution de deux fonctions de $L^2(0, T)$ est dans $L^2(0, T)$ [15]

Dénotons par Γ les λ_n qui sont égaux à quelque μ_m et par γ l'identité de Γ dans $\{\mu_m\}$.

Theorème 1. Le système couplé (6), (7) est démêlable, si:

(i) les systèmes composants sont démêlables;

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_m|} < \infty; \tag{57}$$

(iii) le système (5) est contrôlable approximativement sur $\overline{\operatorname{lin}}_{n\in\Gamma}\{\varphi_n\}$:

$$\overline{\operatorname{lin}}_{n\in\Gamma}\{\varphi_n\}\subset\overline{R(D_1)} \tag{58}$$

où D_1 a été défini dans (9);

(iv) la fonction transfer du premier système (5) ne s'annule pas sur le spectre du second

$$T_1(\mu_m)\neq 0 \quad \text{quel que soit} \quad m\notin\gamma(\Gamma) \tag{59}$$

Démonstration. L'intégrale dans (56) peut admettre deux formes

$$T\exp\lambda_n T \quad \text{pour} \quad n\in\Gamma \quad \text{et} \quad m=\gamma(n) \tag{60}$$

$$\frac{\exp\lambda_n T-\exp\mu_m T}{\lambda_n-\mu_m} \quad \text{pour les autres } n \text{ et } m.$$

L'hypothèse (ii) nous permet d'utiliser le Lemme 1. En appliquant les formes biorthogonales à l'égalité $w(T)\equiv 0$ nous trouvons une suite de conditions impliquées par le Lemme 1

$$c_n h_n^{(1)}+h_n^{(1)}b_n^{(1)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{h_m^{(2)}d_m}{\lambda_n-\mu_m}=0 \quad \text{pour } n\notin\Gamma, \tag{61}$$

$$h_n^{(1)}b_n^{(1)}h_{\gamma(n)}^{(2)}d_{\gamma(n)}=0 \quad \text{pour } n\in\Gamma, \tag{62}$$

$$h_m^{(2)}d_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^{(1)}h_n^{(1)}}{\lambda_n-\mu_n}=0 \quad \text{pour } m\notin\gamma(\Gamma), \tag{63}$$

$$c_n h_n^{(1)}+h_n^{(1)}b_n^{(1)}\sum_{m\neq\gamma(n)}\frac{h_n^{(2)}d_m}{\lambda_n-\mu_m}-h_{\gamma(n)}^{(2)}d_{\gamma(n)}\sum_{\substack{k\\ k\neq n}}\frac{h_k^{(1)}b_k^{(1)}}{\lambda_k-\mu_{\gamma(n)}}=0 \quad \text{pour n}\in\Gamma. \tag{64}$$

Pour prouver la démêlabilité il faut montrer que ces conditions entraînent $c_n=0$, $d_m=0$ quels que soient m et n.

Il est facile de voir que $T(\mu_m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^{(1)}h_n^{(1)}}{\lambda_n-\mu_m}\neq 0$ par l'hypothèse (iv). Tout $h_m^{(2)}\neq 0$, car le système $\{H_2, S_2(t)\}$ est démêlable, donc $d_m=0$ pour $m\in\gamma(\Gamma)$ (63).

Les hypothèses (i), (iii) et (62) assurent que $d_m=0$ pour tout m. Alors les formules (61) et (62) donnent $c_n h_n^{(1)}=0$, quel que soit n. Rappelons encore la supposition (i) afin d'obtenir $c_n=0$ pour tout n.

Remarque 1. Dans les cas des opérateurs H et B bornés la convergence de la série dans (63), qui décrit la fonction de transfer est une conséquence de (13).

Si H et B sont des opérateurs d'observation et de contrôle aux limites, la convergence vient du théorème de Mercer [17]. En effet les nombres $b_n^{(1)}$, $h_n^{(1)}$ sont des valeurs des fonctions propres de (5).

Remarque 2. Pour les systèmes qui vérifient (ii) les conditions (i), (iii) et (iv) sont aussi nécessaires de la démêlabilité de (6).

4. Observabilité finale

On se pose une question, si la trajectoire observée (56) définit d'une manière continue l'état final $S_2(T)x_2$ du processus $\{H_2, S_2(t)\}$. On utilise une estimation grossière:

$$\|S_2(T)x_2\| = \left\| \sum_{m=1}^{\infty} d_m \psi_m \exp(\mu_m T) \right\| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \exp(\operatorname{Re} \mu_m T). \tag{65}$$

Afin de garantir la démêlabilité on admet les hypothèses du Théorème 1 et bien entendu, des suppositions sur μ_m pour que $S_2(t)$ soit un semigroupe fortement continu.

Comme conséquence on a

$$\operatorname{Re} \mu_m \to -\infty .$$

Soit ξ_k un élément de (21) et δ_k la distance correspondante (22). Nous dénotons par a_k le coefficient correspondant à ξ_k dans $w(t)$ (formule (56)). Le coefficient a_k est compris comme une série de tous les coefficients de ξ_k, parce que ξ_k peut se répéter infiniment. Il est clair que la distance δ_k est égale à $1/\|g_k\|$ où g_k est une forme biorthogonale à (21) correspondante à ξ_k. Alors

$$|a_k| = \|g_k(w)\| \leqslant \frac{1}{\delta_k} \|w\| . \tag{66}$$

Cette formule est valable pour toutes les topologies considérées dans le paragraphe 2.

Si $\xi_k = \exp \mu_m t$ pour $m \notin \gamma(\Gamma)$ on obtient de (56) (comparez (63)):

$$|d_m| \leqslant \frac{1}{\delta_m |h_m^{(2)}| \, |T_1(\mu_m)|} \|w\| . \tag{67}$$

De l'autre côté, si m est dans $\gamma(\Gamma)$, on a (comparez avec (62))

$$|d_m| \leqslant \frac{1}{\delta_m |h_m^{(2)}| \, |h_n^{(1)}| \, |b_n^{(1)}|} \|w\| \qquad \text{où } n = \gamma(m). \tag{68}$$

Il en résulte une majoration

$$\|S_2(T)x_2\| \leqslant \left(\sum_{m \notin \gamma(\Gamma)} \frac{\exp \operatorname{Re} \mu_m T}{\delta_m |h_m^{(2)}| \, |T_1(\mu_m)|} + \sum_{n \in \Gamma} \frac{\exp \operatorname{Re} \mu_{\gamma(n)} T}{\delta_{\gamma(n)} |h_{\gamma(n)}^{(2)} \, h_n^{(1)} b_n^{(1)}|} \right) \|w\| . \tag{69}$$

Il est donc clair que le système (6) est finalement observable si la série dans (69) converge (voir [1] et [10]).

Example 2. Retournons au système couplé de l'exemple 1, et supposons que α n'est pas rationnel. En ce cas, la formule (69) se simplifie en gardant seulement la première série.

Faisons ici une petite déviation et rappelons que l'équation de la chaleur obéit à la loi du temps critique ([1], [2]), c'est à dire qu'il existe un temps positif T_0 qui divise un domaine d'observabilité finale ($T > T_0$) et un domaine sans cette propriété

$(T<T_0)$. Dans l'exemple 1 le temps critique du premier composant $M(1)$ est dépendent du point d'observation v. Est-il possible d'obtenir un temps raccoursi après l'observation du système original par l'intermédiaire d'un système auxiliaire m?

Dans les situations raisonnables de poit de vue pratique il n'y a pas d'espoir d'économiser le temps d'observation. En effet la trajectoire (56) dépend de la trajectoire observée de M d'une façon continue.

Il nous reste à nous contenter de dériver facilement la formule

$$T_0 = -\liminf_n \frac{\log |\delta_m h^{(2)} T_1(\mu_m)|}{|\mu_m|} \tag{70}$$

qui définit le temps après lequel on a l'observabilité finale et de nous préoccuper que la présence de δ_m et $T_1(\mu_m)$ ne change pas le temps critique pour M.

Exemple 3. On considère toujours l'exemple 1 avec α rationnel ici. On est dans les hypothèses du Lemme 3 et immitant l'argument de [1] et [2] on peut trouver la formule de temps critique

$$\max\left(-\liminf_{m\notin\gamma(\Gamma)} \frac{\log\left(|h_m^{(2)}|\,|T_1(\mu_m)|\right)}{|\mu_m|},\ -\liminf_{n\in\Gamma} \log |h_{\gamma(n)}^{(2)} h_n^{(1)} b_n^{(1)}|\right).$$

Exemple 4. Un processus de la chaleur admet une solution de la forme

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n \exp \lambda_n t$$

où $\{c_n\}$ sont des coefficients de l'état initial y_0 et h_n des coefficients de l'observateur (par rapport aux fonctions propres).

L'énergie thermique de u se transforme à l'énergie mécanique et en effet u contrôle une équation de l'onde

$$\partial^2 w/\partial t^2 = \partial^2 w/\partial x^2, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$
$$w(x,0)=w_0(x), \quad \partial w/\partial t\,(x,0)=0, \quad w(1,t)=u(t),$$
$$\partial w(0,t)/\partial x = 0.$$

On observe les vibrations $w(0,t)$. Le système couplé avec les états initiaux (y_0, w_0) n'est pas démêlable dans $L^2(0,1)$, car un propre choix de w_0 peut compenser des effects de chaque u grâce à l'expression

$$w(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (w_0)_n \cos \pi nt + \psi(t), \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

où ψ représente des effets de u.

On a donc une situation, où un couplage de deux systèmes (observable finalement et observable initialement) donne un système, qui n'est pas démêlable (voir [14]).

5. Contrôlabilité

Rappelons des définitions de contrôlabilité ([3], [6]): nous disons que le système (19) est approximativement contrôlable si l'image de C^* est dense dans $X_1^* \times X_2^*$. Si l'image de C^* est tout l'espace le système (19) est dit contrôlable.

Théorème 2. Supposons que les systèmes composants sont contrôlables approximativement (i*) et que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

(ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_m|} < \infty$,

(iii*) la partie $\overline{\lim_{n \in \Gamma}} \{\varphi_n\}$ du système (18) est démêlable,

(iv*) $T_1^*(\overline{\mu_m}) \neq 0$ pour $m \notin \gamma(\Gamma)$.

Alors le système (19) est approximativement contrôlable.

Démonstration. Le système couplé est contrôlable approximativement si et seulement si (6) est démêlable [6, 18].

Le Théorème 1 donne des conditions suffisantes de démêlabilité. Pour les mêmes raisons de dualité (i) équivaut à (i*).

La fonction transfer du système dual, c'est un opérateur adjoint à T_1, et les valeurs propres nouvelles sont des nombres adjoints aux anciennes. On a donc les conditions (ii*) et (iv*). Pour établir l'équivalence de (iii) et (iii*), observons que $\overline{R(C_1)} \supset \overline{\text{lin}} \{\varphi_n\}$ c'est le même que Ker $C_1^* \cap \overline{\text{lin}} \{\varphi_n\}^* = \{0\}$.

Exemple 5. Considérons le système dual de celui de l'exemple 3. On se donne une valeur initiale de $S_2^*(\cdot)$ (19) et on essaie de contrôler cette valeur à zéro en utilisant, par exemple les contrôles de L^2. Par l'intermédiaire des résultats de dualité [3, 6] la formule (71) donne le temps critique de contrôlabilité à l'origine.

Bibliographie

1. Dolecki S., Observability for the one-dimensional heat equation. *Stud. Math.* **48** (1973) 291–205.
2. Dolecki S., Observability for regular processes *J. Math. Anal. Appl.* (à paraître).
3. Dolecki S., Duality of various notions of controllability and observability. Proc. Int. Conf. on Diff. Eq'ns, Un. South. Calif.
4. Dolecki S., A classification of controllability concepts for infinite-dimensional linear systems. This journal (à paraître).
5. Dolecki S., Bounded controlling seguences, lover stability and certain penalty procedures. *Appl. Math. Opt.* (à paraître).
6. Dolecki S., Russell D. L., A general theory of observation and control (à paraître).
7. Dunford N., Schwartz J., Linear operators. Pt. 1. New York 1958.
8. Fattorini H. O., Russell D. L., Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations. *Quart. Appl. Math.* **32** (1974) 45–69.
9. Fuhrmann P., On series and parallel coupling of a class of discrete time infinite dimensional systems SIAM J. Contr. **14** (1976).

10. Luxemburg W. A. J., Korevaar J., Entire functions and Müntz-Szász type approximation. *Trans. AMS* **157** (1971) 23–37.
11. Mizel V. J., Seidman T. I., Observation and prediction for the heat equation. *J. Math. Anal. Appl.* **28** (1969) 303–312.
12. Paley R. E. A. C., Wiener N., Fourier transforms in the complex domain. *AMS* (Providence) **19** (1934).
13. Russell D. L., A unifield boundary value controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *St. Appl. Math.* **52** (1973) 189–211.
14. Russell D. L., Boundary value controllability of wave and heat processes in star-complemented regions. Proc. Conf. Diff. Games and Control Th., Kingston, R. J. 1973.
15. Stein E. G., Weiss G., Introduction of Fourier analysis on Euclidean space. Princeton 1971.
16. Schwartz L., Etude des sommes d'exponentielles. Paris 1959.
17. Tricomi F. G., Integral equations. New York 1957.
18. Triggiani R., Extensions of rank condition for controllability and observability to Banach spaces and unbounded operators *SIAM J. Contr.* **14** (1976).

Reçu Avril 1975

Sterowalność i obserwowalność szeregowych połączeń układów

Rozważono zachowanie się szeregowego połączenia dwu (nieskończenie wymiarowych) układów sterowania zależnie od własności poszczególnych układów i ich wzajemnych powiązań.

Badane układy można opisać za pomocą szeregów wykładniczych. Dlatego adaptacja i uogólnienie pewnych wyników z aproksymacji Müntza-Szásza umożliwia danie odpowiedzi na postawione pytania.

Управляемость и наблюдаемость последовательных соединений систем

Рассматривается поведение последовательного соединения двух (бесконечномерных) систем управления в зависимости от свойств отдельных систем и их взаимосвязей. Исследуемые системы можно описать в виде показательных рядов. Благодаря этому адаптация и обобщение некоторых результатов теории аппроксимации позволяет получить решение постановленной задачи.